Математика — для теста

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

1. Тип 1 № 26216

В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 110°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

Решение. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности, значит

$$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOD)=\frac{1}{2}\cdot 70^\circ=35^\circ.$$

Ответ: 35.

Ответ: 35

2. Тип 2 № 513334

Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (2; 1), (2; 4), (6; 1), (6; 4).

Решение. Для того, чтобы найти диагональ прямоугольника, найдем длину a и ширину b:

$$a=6-2=4$$
$$b=4-1=3$$

По теореме Пифагора: (диагональ d является гипотенузой)

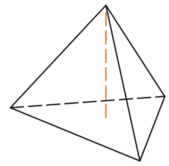
$$d^2=a^2+b^2=4^2+3^2=16+9=25\Leftrightarrow d=5.$$

Ответ: 5.

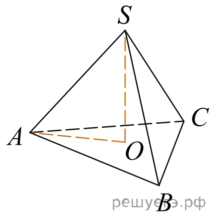
Ответ: 5

3. Тип 3 № 522968

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а сторона основания равна $3\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.



Решение. Введем обозначения, как показано на рисунке. Пусть SO — высота пирамиды, $R = OA$ — радиус описанной вокруг основания окружности. По формуле $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, находим: $OA = 3$. Высоту пирамиды найдем из прямоугольного треугольника SOA по теореме Пифагора:



$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Ответ: 4.

Ответ: 4

4. Тип 4 № 510333

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы две решки.

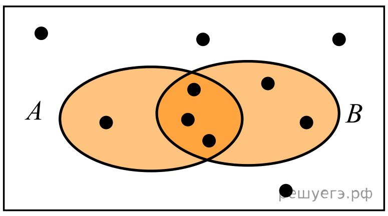
Решение. Всего возможных исходов — 8: орел-орел-орел, орел-орел-решка, орел-решка-решка, орел-решка-орел, решка-решка-решка, решка-решка-орел, решка-орел-орел, решка-орел-решка. Благоприятными являются четыре: решка-решка-решка, решка-решка-орел, решка-орел-решка, орел-решка-решка. Следовательно, искомая вероятность равна $4 : 8 = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Ответ: 0,5

5. Тип 5 № 509335

На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A.



Решение. Из диаграммы определяем, что:

$$P(A) = \frac{4}{10}, \qquad P(B) = \frac{5}{10}, \qquad P(AB) = \frac{3}{10}.$$

Подставим найденные значения в формулу условной вероятности, получим:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 4} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

Ответ: 0,75

6. Тип 6 № 101011

Решите уравнение $\frac{1}{5}x^2 = 16\frac{1}{5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение. Последовательно получаем:

$$\frac{1}{5}x^2 = 16\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^2 = \frac{81}{5} \Leftrightarrow x^2 = 81 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9, \\ x = 9. \end{array}\right.$$

Ответ: −9.

Ответ: -9

7. Тип 7 № 26821

Найдите значение выражения $5(p(2x)-2p(x+5))$, если $p(x)=x-10$.

Решение. Заметим, что $p(2x)=2x-10$, а $p(x+5)=(x+5)-10=x-5$. Следовательно,

$$p(2x)-2p(x+5)=(2x-10)-2(x-5)=0,$$

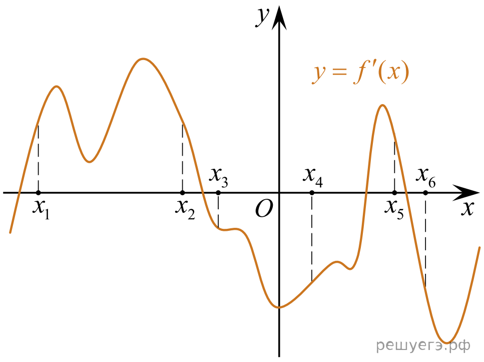
поэтому $5(p(2x)-2p(x+5))=0$.

Ответ: 0.

Ответ: 0

8. Тип 8 № 642323

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Решение. Возрастанию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют неотрицательные значения её производной. Производная неотрицательна в точках x_1, x_2, x_5. Таких точек 3.

Ответ: 3.

Ответ: 3

Источники:

ЕГЭ по математике 01.06.2023. Основная волна. Задания Дальнего Востока;

ЕГЭ по математике 01.06.2023. Основная волна. Дальний Восток. Вариант 1.

9. Тип 9 № 514041

Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 32 километра? Ответ выразите в километрах.

Решение. Выразим h из данной в условии формулы:

$$l=\sqrt{2Rh}\Leftrightarrow l^2=2Rh\Leftrightarrow h=\frac{l^2}{2R}=\frac{32^2}{2\cdot 6400}=0{,}08\text{ км}.$$

Ответ: 0,08.

Ответ: 0,08

10. Тип 10 № 119969

Илья и Слава выполняют одинаковый тест. Илья отвечает за час на 16 вопросов текста, а Слава — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Илья закончил свой тест позже Славы на 33 минуты. Сколько вопросов содержит тест?

Решение. Обозначим N — число вопросов теста. Тогда время, необходимое Илье, равно $N/16$ ч., а время, необходимое Славе, равно $N/20$ ч. Илья закончил свой тест позже Славы на 33 минуты, откуда имеем:

$$\frac{N}{16}-\frac{N}{20}=\frac{33}{60}\Leftrightarrow\frac{N}{80}=\frac{11}{20}\Leftrightarrow N=44\quad.$$

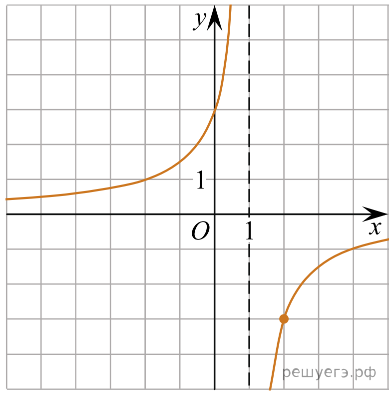
Таким образом, тест содержит 44 вопроса.

Ответ: 44.

Ответ: 44

11. Тип 11 № 508975

На рисунке изображён график функции $f(x)=\dfrac{k}{x+a}$. Найдите $f(-24)$.



Решение. График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, значит, $a = -1$. По графику $f(2) = -3$, тогда $\dfrac{k}{2-1}=-3 \Leftrightarrow k=-3$. Таким образом,

$$f(-24)=\frac{-3}{-24-1}=\frac{3}{25}=0,12.$$

Ответ: 0,12.

Ответ: 0,12

12. Тип 12 № 71137

Найдите наименьшее значение функции $y=10x-10\ln(x+3)+24$ на отрезке $[-2,5;0]$.

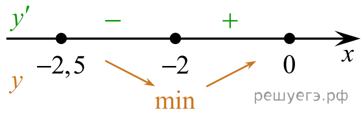
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x)=10-\frac{10}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases}1-\dfrac{1}{x+3}=0,\\ -2,5\leqslant x\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2,\\ -2,5\leqslant x\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=-2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2)=10\cdot(-2)-10\ln 1+24=4.$$

Ответ: 4.

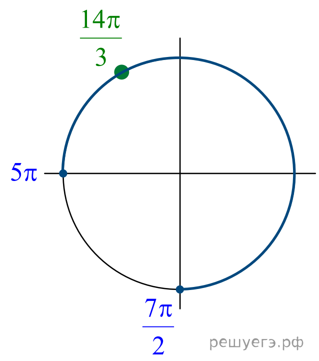
Ответ: 4

13. Тип 13 № 639950

а) Решите уравнение $\sqrt{2\cos^2 x-4\cos x+3}=\sqrt{\cos x+6}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$.

Решение. а) Последовательно получаем:



$$\sqrt{2\cos^2 x-4\cos x+3}=\sqrt{\cos x+6}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x+6\geqslant 0,\\ 2\cos^2 x-4\cos x+3=\cos x+6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\geqslant -6,\\ 2\cos^2 x-5\cos x-3=0\end{cases}\underset{|\cos x|\leqslant 1}{\Leftrightarrow} 2\cos^2 x-5\cos x-3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=3,\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\underset{|\cos x|\leqslant 1}{\Leftrightarrow}\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$, при помощи тригонометрической окружности. Подходит число: $\frac{14\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi k; -\frac{2\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{14\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi k; -\frac{2\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{14\pi}{3}$.

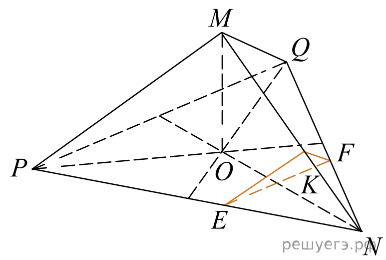
Источник: Пробный ЕГЭ по математике, Москва, 06.04.2023. Вариант 1

14. Тип 14 № 625651

В правильной треугольной пирамиде $MNPQ$ с вершиной M сторона основания равна 15, высота равна $\sqrt{6}$. На ребрах NP, NQ и NM отмечены точки E, F, K соответственно, причем $NE = NF = 3$ и $NK=\frac{9}{5}$.

а) Докажите, что плоскости EFK и MPQ параллельны.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости MPQ.

Решение. а) Заметим, что прямые EF и PQ параллельны. Вычислим боковое ребро пирамиды:



$$NO=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 15=5\sqrt{3},\qquad MN=\sqrt{NO^2+OM^2}=9,$$

где O — центр основания. Заметим, что $\frac{EN}{PN}=\frac{1}{5}=\frac{NK}{MN}$, следовательно, прямые EK и PM параллельны. Таким образом, плоскости EFK и MPQ содержат две пары пересекающихся параллельных прямых и, следовательно, параллельны.

б) Расстояние от точки K до плоскости MPQ равно расстоянию между параллельными плоскостями MPQ и EFK, которое может быть вычислено как разность расстояний до этих плоскостей от точки N:

$$S_{PQN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot PQ^2=\frac{225\sqrt{3}}{4},\qquad S_{MPQ}=\sqrt{\frac{33}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{15}{2}}=\frac{45}{4}\sqrt{11},$$
$$d(N,MPQ)=\frac{S_{PQN}\cdot MO}{S_{MPQ}}=\frac{15\sqrt{22}}{11}.$$

Пирамида $KEFN$ подобна пирамиде $MNPQ$ с коэффициентом $k=\frac{1}{5}$, следовательно,

$$d(N,EFK)=\frac{1}{5}d(N,MPQ),\qquad d(K,MPQ)=\frac{4}{5}d(N,MPQ)=\frac{12\sqrt{22}}{11}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{22}}{11}$.

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{22}}{11}$.

Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 379

15. Тип 15 № 511528

Решите неравенство: $\left(x^2+2x-3\right)\cdot\sqrt{4-x}\leqslant 0$.

Решение. Пусть $x<4$. Тогда $\sqrt{4-x}>0$, и неравенство равносильно неравенству $x^2+2x-3\leqslant 0$. Решим систему:

$$\begin{cases}x<4,\\ x^2+2x-3\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4,\\ -3\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow -3\leqslant x\leqslant 1.$$

Заметим, теперь, что $x=4$, также является решением.

Ответ: $[-3;\ 1]\cup\{4\}$.

Ответ: $[-3;\ 1]\cup\{4\}$.

16. Тип 16 № 561774

В начале года Виктор приобрёл ценные бумаги на сумму 7 тыс. рублей. В середине каждого года стоимость ценных бумаг возрастает на 1,5 тыс. рублей. В любой момент Виктор может продать ценные бумаги и положить вырученные деньги на банковский счёт. В середине каждого года сумма на счёте будет увеличиваться на 12%. В начале какого года после покупки Виктор должен продать ценные бумаги, чтобы через пятнадцать лет после покупки ценных бумаг сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение. Пусть при продаже ценных бумаг Виктор получит за них S тыс. рублей. Чтобы ему выгодно было продавать ценные бумаги, ежегодные начисления по вкладу должны превышать 1,5 тыс. рублей, т. е. должно выполняться неравенство

$$0,12S>1,5\Leftrightarrow S>12,5.$$

В конце n-го года после покупки ценных бумаг их стоимость будет равна 7 + 1,5n тыс. рублей. Так как неравенство $7+1,5n>12,5$ выполняется при $n = 4$ и не выполняется при меньших значениях n, Виктор должен продать ценные бумаги в начале пятого года после их покупки.

Ответ: 5.

Ответ: 5.

17. Тип 17 № 635756

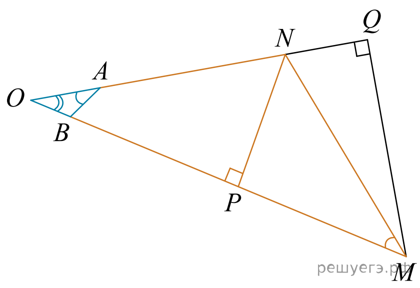
На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3OA$ от прямой OA, а на луче OA — точка N на расстоянии $3OB$ от прямой OB. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 3.

а) Докажите, что треугольник AOB подобен треугольнику MON.

б) Найдите длину отрезка MN.

Решение. а) Введем обозначения, как показано на рисунке. Пусть $OA = a$ и $OB = b$, тогда $NP=3b$ и $MQ=3a$. Заметим, что

$$ON:OM=\frac{NP}{\sin\angle O}:\frac{MQ}{\sin\angle O}=NP:MQ=3b:3a=OB:OA.$$



Следовательно, треугольники AOB и MON подобны, что и требовалось доказать.

б) По теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin\angle O}=2\cdot 3$ или $AB=6\sin\angle O$. Значит,

$$MN:AB=ON:OB=\frac{3b}{\sin\angle O}:b=\frac{3}{\sin\angle O},$$

откуда

$$MN=AB\cdot\frac{3}{\sin\angle O}=6\sin\angle O\cdot\frac{3}{\sin\angle O}=18.$$

Ответ: б) 18.

Ответ: б) 18.

Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 412

18. Тип 18 № 500135

Найдите все значения a при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{6}{x}-5\right|=ax-1$$

на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = ax - 1$ и $g(x) = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$.

При $a \leqslant 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leqslant 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0; \frac{6}{5}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0; \frac{6}{5}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда, $f\left(\frac{6}{5}\right) \geqslant g\left(\frac{6}{5}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{6}{5} - 1 \geqslant 0$, то есть $a \geqslant \frac{5}{6}$.

На промежутке $\left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - 1 = 5 - \frac{6}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - 6x + 6 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leqslant 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 36 - 24a$, поэтому при $a > \frac{3}{2}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{3}{2}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{3}{2}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0 < a < \frac{3}{2}$, то больший корень $x_2 = \frac{6 + \sqrt{D}}{2a} > \frac{3}{a} > 2 > \frac{6}{5}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{6}{5}\right)\left(x_2 - \frac{6}{5}\right) = a\frac{6}{5}^2 - 6 \cdot \frac{6}{5} + 6 = \frac{36a - 30}{25} > 0, \text{ то есть } a > \frac{5}{6}$$

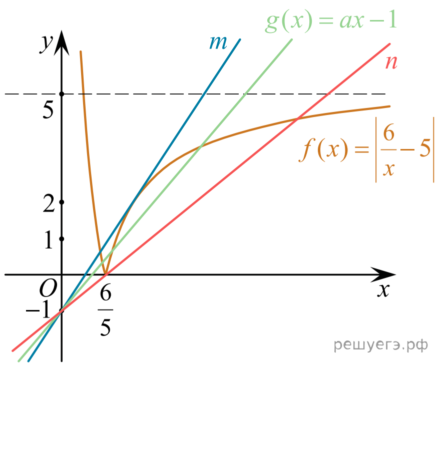
Таким образом, уравнение $\left|\frac{6}{x} - 5\right| = ax - 1$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0; +\infty)$:

- нет корней при $a \leqslant 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{5}{6}$ и $a > \frac{3}{2}$;
- два корня при $a = \frac{5}{6}$ и $a = \frac{3}{2}$;
- три корня при $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$.

Решим задачу графически.

При $a \leqslant 0$ нет решений, так как левая часть неотрицательная, а правая часть меньше -1. Построим графики функций $f(x) = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$ (только положительную часть) и $g(x) = ax - 1$. Отметим, что $g(x) = ax - 1$ — это прямые, проходящие через точку $(0; -1)$.



Три решения это уравнение будет иметь, когда прямые $y = ax - 1$ будут лежать между прямыми m и n. Угловой коэффициент прямой n равен $a = \frac{5}{6}$. Для точек пересечения прямой m с ветвью гиперболы находим:

$$5 - \frac{6}{x} = ax - 1 \Leftrightarrow 5x - 6 = ax^2 - x \Leftrightarrow ax^2 - 6x + 6 = 0.$$

Для точки касания дискриминант $D = 9 - 6a$ должен быть равен нулю, откуда $a = \frac{3}{2}$. Таким образом, $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{6}<a<\frac{3}{2}$. $\frac{5}{6}<a<\frac{3}{2}$.

Источники:

Типовые тестовые задания по математике под редакцией И.В. Ященко, 2017. Задания С6;

ЕГЭ по математике 07.06.2012 года, основная волна.

19. Тип 19 № 513918

Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 10, а сумма которых больше 90, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 90, но больше:

а) 80;
б) 82;
в) 81.

Решение. а) Будем последовательно складывать числа, пока сумма не станет больше 90. Теперь удалим последнее добавленное число. Поскольку оно было не больше 10, сумма осталась больше 90 − 10 = 80. Утверждение верно.

б) Рассмотрим 11 чисел, равных 8,2. Их сумма равна 90,2 > 90. Если взять любые 10 из них, то сумма будет равна 82, а если взять меньше, чем 10 чисел, то сумма будет не больше $9 \cdot 8,2=73,8$. Следовательно, не из любого набора чисел можно выбрать несколько чисел, обладающих указанными свойствами.

в) Пусть в наборе найдутся 9 чисел, больших 9. Тогда их сумма больше 81, но не больше чем 90, и они являются искомыми.

Если в наборе 8 или меньше чисел, больших 9. Тогда их сумма меньше 80, и можно поступить как в пункте а): последовательно прибавлять к ним те, которые меньше 9, пока сумма не станет больше 90. После чего мы можем выкинуть из суммы последнее добавленное число. Сумма окажется меньше 90, но больше 81, поскольку вычеркнули число, меньшее 9.

Таким образом, утверждение верно.

Ответ: а) да, б) нет, в) да.

Ответ: а) да, б) нет, в) да.

Источник: ЕГЭ по математике 16.04.2016. Досрочная волна, резервный день (часть 2)

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	26216	35
2	513334	5
3	522968	4
4	510333	0,5
5	509335	0,75
6	101011	-9
7	26821	0
8	642323	3
9	514041	0,08
10	119969	44
11	508975	0,12
12	71137	4
13	639950	а) $\left\{\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k; -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{14\pi}{3}$.
14	625651	б) $\dfrac{12\sqrt{22}}{11}$.
15	511528	$[-3;\ 1]\cup\{4\}$.
16	561774	5.
17	635756	б) 18.
18	500135	$\dfrac{5}{6}<a<\dfrac{3}{2}$. $\dfrac{5}{6}<a<\dfrac{3}{2}$.
19	513918	а) да, б) нет, в) да.