ЕГЭ по математике

1. 35
2. 5
3. 4
4. 0,5
5. 0,5
6. —9
7. 0
8. 3
9. 0,08
10. 44
11. —0,04
12. 4

Задание 13

а) Решим уравнение:

$$\sqrt{2\cos^2 x - 4\cos x + 3} = \sqrt{\cos x + 6}$$

Обозначим $y = \cos x$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{2y^2 - 4y + 3} = \sqrt{y + 6}$$

Возведём обе части в квадрат (учитывая, что подкоренные выражения неотрицательны):

$$2y^2 - 4y + 3 = y + 6$$

Переносим все слагаемые в одну сторону:

$$2y^2 - 5y - 3 = 0$$

Решим квадратное уравнение:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow y_1 = 3, \quad y_2 = -\frac{1}{2}$$

Поскольку $\cos x \in [-1; 1]$, значение $y = 3$ не подходит.

Остаётся только $y = -\frac{1}{2}$.

Проверим, удовлетворяет ли это значение исходному уравнению:

$$\sqrt{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + 6\right)} \Rightarrow \sqrt{0.5 + 2 + 3} = \sqrt{5.5}$$

Обе части равны, следовательно, $y = -\frac{1}{2}$ — верный корень.

Ответ к пункту **а**:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

б) Найдём все значения x, при которых $\cos x = -\frac{1}{2}$, на отрезке $\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$.

Общее решение уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ на окружности:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{и} \quad \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Переведём границы отрезка в десятичную форму через π, чтобы было удобнее сравнивать:

$$\frac{7\pi}{2} = 3.5\pi, \quad 5\pi = 5\pi$$

Подставим значения n, чтобы попасть в этот интервал:

- $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3} \approx 4.67\pi$ **— подходит**
- $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3} \approx 3.33\pi$ **— меньше 3.5π, не подходит**
- $x = \frac{4\pi}{3} + 4\pi = \frac{16\pi}{3} \approx 5.33\pi$ **— больше 5π, не подходит**

Значит, единственный корень на отрезке:

$$x = \frac{14\pi}{3}$$

Ответ:

а) $\cos x = -\frac{1}{2}$

б) $x = \frac{14\pi}{3}$

Задание 14

Дано:

Пирамида $MNPQ$ — правильная треугольная, сторона основания равна 15, высота — $\sqrt{6}$.
На рёбрах NP, NQ, NM отмечены точки E, F, K соответственно, причём:

$$NE = NF = 3, \quad NK = \frac{9}{5}$$

а) Докажите, что плоскости EFK и MPQ параллельны

Рассмотрим правильную треугольную пирамиду $MNPQ$, у которой:

- Основание NPQ — равносторонний треугольник со стороной 15;
- Вершина M проектируется в центр основания;
- Все рёбра MN, MP, MQ равны;
- Высота $MO = \sqrt{6}$, где O — центр треугольника NPQ.

Рассмотрим точки:

- $E \in NP$, $NE = 3 \Rightarrow \frac{NE}{NP} = \frac{1}{5}$
- $F \in NQ$, $NF = 3 \Rightarrow \frac{NF}{NQ} = \frac{1}{5}$
- $K \in NM$, $NK = \frac{9}{5}$, а NM — ребро пирамиды.

Так как точки E, F, K делят рёбра пирамиды в одинаковом отношении от одной вершины N, то треугольник EFK лежит в плоскости, которая параллельна плоскости основания MPQ. Это следует из свойства: **в пирамиде плоскость, проходящая через точки, делящие рёбра от одной вершины в одинаковом отношении, параллельна основанию**.

Ответ на пункт а):
Плоскости EFK и MPQ параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости MPQ

Так как плоскости EFK и MPQ параллельны, а точка $K \in EFK$, то расстояние от K до плоскости MPQ равно расстоянию между этими плоскостями.

Высота пирамиды $MO = \sqrt{6}$ — перпендикуляр от вершины M к плоскости MPQ.

Рассмотрим отрезок NM. Точка $K \in NM$, при этом $NK = \frac{9}{5}$, значит:

$$\frac{MK}{MN} = 1 - \frac{NK}{MN}$$

Поскольку MN — ребро пирамиды, его длина остаётся постоянной. Обозначим её как $a = MN$.

Тогда:

$$\text{Расстояние от } K \text{ до плоскости } MPQ = \frac{MK}{MN} \cdot MO = \left(1 - \frac{9}{5a}\right) \cdot \sqrt{6}$$

Найдём MN. Поскольку пирамида правильная и высота из вершины M равна $\sqrt{6}$, а основание — треугольник со стороной 15, то расстояние от центра основания O до вершины N составляет:

$$R = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}, \quad \text{(радиус описанной окружности)}$$

Тогда:

$$MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{6+75} = \sqrt{81} = 9$$

Теперь найдём расстояние:

$$\left(1 - \frac{9}{5 \cdot 9}\right) \cdot \sqrt{6} = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \sqrt{6} = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{6}$$

Ответ на пункт б):

Расстояние от точки K до плоскости MPQ равно $\frac{4}{5} \cdot \sqrt{6}$

Задание 15

Решим неравенство:

$$(x^2 + 2x - 3) \cdot \sqrt{4 - x} \leq 0$$

---

1. Область допустимых значений (ОДЗ):

Корень существует только при:

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

Также подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Следовательно, ОДЗ:

$$x \in (-\infty;\ 4]$$

---

2. Найдём нули выражения $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow D = 2^2 + 4 \cdot 3 = 16 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1$$

3. Исследуем знак выражения на промежутках с учётом ОДЗ:

Разбиваем ОДЗ на интервалы:

- $(-\infty;\ -3)$
- $(-3;\ 1)$
- $(1;\ 4)$

Проверка на каждом из них:

- **На** $(-\infty; -3)$
  Возьмём $x = -4$:
  $x^2 + 2x - 3 = 16 - 8 - 3 = 5 > 0$
  $\sqrt{4 - (-4)} = \sqrt{8}$ — определено
  Произведение положительно: $> 0 \Rightarrow$ **не подходит**
- **На** $(-3; 1)$
  Возьмём $x = 0$:
  $x^2 + 2x - 3 = -3$, $\sqrt{4 - 0} = 2$
  Произведение отрицательно: $-3 \cdot 2 = -6 < 0 \Rightarrow$ **подходит**
- **На** $(1; 4)$
  Возьмём $x = 2$:
  $x^2 + 2x - 3 = 5$, $\sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$
  Произведение положительно: $> 0 \Rightarrow$ **не подходит**

---

4. Проверим граничные точки:

- $x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0,\ \sqrt{4 - (-3)} = \sqrt{7} \Rightarrow 0 \cdot \sqrt{7} = 0 \Rightarrow$ **подходит**
- $x = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0,\ \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow 0 \cdot \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$ **подходит**
- $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4 - 4} = 0,\ x^2 + 2x - 3 = 16 + 8 - 3 = 21 \Rightarrow 21 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ **подходит**

Ответ:

$$\boxed{x \in [-3;\ 1] \cup \{4\}}$$

Задание 16

Решение:

Обозначим через k — номер года, **в начале которого** Виктор продаёт бумаги (где $k = 1, 2, ..., 15$).
Значит, он продаёт бумаги **в середине k-го года**, когда их стоимость уже выросла.

---

1. Стоимость бумаг в середине k-го года:

Каждый год в середине стоимость увеличивается на 1.5 тыс.
Исходная цена — 7 тыс. руб., тогда:

$$\text{Стоимость в середине } k\text{-го года: } 7 + 1.5(k - 0.5) = 6.25 + 1.5k$$

---

2. Сколько лет деньги будут лежать на счёте?

Деньги кладутся в **середине k-го года**.
Начисления по 12% происходят в середине каждого следующего года.
Значит, до конца 15-летнего периода остаётся $15 - k$ начислений.

---

3. Формула суммы на счёте через 15 лет:

$$S(k) = (6.25 + 1.5k) \cdot (1.12)^{15-k}$$

Нужно найти такое $k \in \{1, 2, ..., 15\}$, при котором $S(k)$ — **максимально**.

4. Вычислим значения:

k	Стоимость	Лет на вкладе	Сумма $S(k) \approx$
1	7.75	14	$7.75 \cdot 5.473 \approx 42.4$
2	9.25	13	$9.25 \cdot 4.888 \approx 45.2$
3	10.75	12	$10.75 \cdot 4.365 \approx 46.9$
4	12.25	11	$12.25 \cdot 3.898 \approx 47.7$
5	13.75	10	$13.75 \cdot 3.478 \approx 47.8$ ← **максимум**
6	15.25	9	$15.25 \cdot 3.105 \approx 47.4$
7	16.75	8	$16.75 \cdot 2.773 \approx 46.4$

Максимум достигается при $k = 5$.

Ответ:

Наибольшая сумма на счёте через 15 лет получится, если продать ценные бумаги **в начале пятого года**.

$$\boxed{5}$$

Задание 17

а) Докажите, что $\triangle AOB \sim \triangle MON$

Обозначим:

Пусть:

- $OA = a$
- $OB = b$
- Тогда по условию:
  $OM = 3a$, $ON = 3b$

Рассмотрим треугольники AOB и MON:

В треугольнике AOB:

- Стороны: $OA = a$, $OB = b$

В треугольнике MON:

- Стороны: $OM = 3a$, $ON = 3b$

Рассмотрим углы:

- Угол $\angle AOB$ общий с углом $\angle MON$, так как:
  - M лежит на продолжении OB, а N на продолжении OA
  - Значит, $\angle MON = \angle AOB$

Таким образом, стороны треугольника MON пропорциональны сторонам AOB:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{3a}{a} = 3, \quad \frac{ON}{OB} = \frac{3b}{b} = 3$$

И при этом между этими сторонами равный угол:

$$\angle MON = \angle AOB$$

Следовательно, треугольники $\triangle AOB \sim \triangle MON$ по **двум сторонам и углу между ними (по признаку подобия)**.

Ответ на пункт а):

Треугольники $\triangle AOB$ и $\triangle MON$ подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

б) Найдите длину отрезка MN

По подобию треугольников:

- Коэффициент подобия = 3 (так как $OM = 3 \cdot OA$, $ON = 3 \cdot OB$)

Тогда:

$$\angle AOB = \angle MON, \quad \Rightarrow \text{дуга } \overset{\frown}{MN} \text{ соответствует дуге } \overset{\frown}{AB}$$

А значит:

$$MN = 3 \cdot AB$$

Найдём длину AB, используя радиус описанной окружности.

Вспомним формулу для радиуса описанной окружности в треугольнике:

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle AOB} \quad \Rightarrow \quad AB = 2R \cdot \sin\angle AOB$$

Поскольку $R = 3$, получаем:

$$AB = 6 \cdot \sin\angle AOB \Rightarrow MN = 3 \cdot AB = 18 \cdot \sin\angle AOB$$

Ответ на пункт б):

$$MN = 18 \cdot \sin\angle AOB$$

(численного значения нет, так как угол не задан — но ответ в выражении через него полностью корректен)

Задание 18

Решение

Рассмотрим уравнение:

$$\left|\frac{6}{x}-5\right|=ax-1$$

Ищем все значения параметра a, при которых уравнение имеет **более двух корней** на промежутке $(0;+\infty)$.

---

1. Область определения

Функция $\frac{6}{x}$ определена при $x>0$, значит рассматриваем уравнение на этом промежутке.

---

2. Раскрытие модуля

Рассмотрим два случая:

1. Если $\frac{6}{x}-5\geq 0\Rightarrow\frac{6}{x}\geq 5\Rightarrow x\leq\frac{6}{5}$, тогда:

$$\left|\frac{6}{x}-5\right|=\frac{6}{x}-5$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{6}{x}-5=ax-1\Rightarrow\frac{6}{x}-ax=4$$

Домножим на x (так как $x>0$):

$$6-ax^2=4x\Rightarrow ax^2+4x-6=0\quad(1)$$

2. Если $\frac{6}{x}-5<0\Rightarrow x>\frac{6}{5}$, тогда:

$$\left|\frac{6}{x}-5\right|=5-\frac{6}{x}$$

Подставим:

$$5 - \frac{6}{x} = ax - 1 \Rightarrow ax + \frac{6}{x} = 6$$

Домножим на x:

$$ax^2 - 6x + 6 = 0 \quad (2)$$

---

3. Анализ количества корней

Каждое из уравнений (1) и (2) — квадратное, значит, может иметь не более двух корней.

Чтобы уравнение имело **более двух корней**, график функции $y = ax - 1$ должен пересекать график $y = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$ более чем в двух точках. Это возможно **только если прямая касается точки излома графика модуля** и пересекает обе его ветви.

Найдём координаты точки излома:

$$\frac{6}{x} - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}, \quad y = \left|\frac{6}{x} - 5\right| = 0$$

То есть, точка излома модуля: $\left(\frac{6}{5};\ 0\right)$

Подставим эту точку в правую часть:

$$ax - 1 = 0 \Rightarrow ax = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$$

---

4. Вывод

Если $a = \frac{5}{6}$, то прямая $y = ax - 1$ проходит через точку излома модуля и также пересекает обе ветви графика. Значит, уравнение имеет **три корня** на $(0; +\infty)$.

Если $a \neq \frac{5}{6}$, то максимум два пересечения.

Ответ:

$$\boxed{a = \frac{5}{6}}$$

Задание 19

Решение:

Пусть у нас есть набор положительных чисел ≤ 10, общая сумма которых **строго больше 90**.

Нужно выбрать из них некоторые числа, чтобы их сумма была:

- **не больше 90**
- **но больше определённого значения** (например, 80, 81, 82)

Задача — найти **максимальное значение**, которое **всегда можно гарантировать**, независимо от того, какие именно числа даны.

Используем идею жадного алгоритма:

Будем набирать числа из набора, пока их сумма не превысит 90. Так как все числа ≤ 10, при сумме больше 90 мы могли набрать хотя бы 91, а перед этим набрали сумму не более 90.

То есть **всегда можно набрать подмножество чисел с суммой** ≤ 90, но при этом как минимум $> 91 - 10 = 81$, потому что следующее число добавит хотя бы 1 (так как числа положительные).

Пример:

Пусть в наборе 10 чисел по 9:

$$9 + 9 + \ldots + 9 = 90$$

Если добавить ещё хотя бы **одну единицу**, общая сумма станет 91. Тогда можно выбрать 10 девяток — их сумма ровно 90.

В этом случае можно набрать сумму **90**, и никакое подмножество с большей суммой невозможно. Но любые 9 девяток = 81, а 10 девяток = 90, то есть **можно набрать сумму от 81 до 90 включительно**.

Но можно ли **всегда** набрать сумму строго больше 82?

Проверка крайних случаев:

Пусть у нас 9 чисел по 10:
$10 \times 9 = 90,$
добавим ещё 1 → сумма = 91

Тогда возможные суммы:

- 90 (из 9 десяток)
- 81 (если взять 8 десяток и 1)

Между 81 и 90 — можно ли гарантировать 82?

Нет. Если в наборе, например, 8 десяток и одна единица (сумма = 81), добавим единицу — получится 82, но если таких единиц не окажется, 82 может быть недостижимо.

Значит:

- 80 — **всегда достижимо**
- 81 — **тоже достижимо**
- 82 — **не всегда**

Ответ:

$$\boxed{81}$$

Это наибольшее число, которое **всегда можно гарантировать** при любых наборах положительных чисел, не превышающих 10, с общей суммой более 90.